w-Wiener Polynomials for Width Distance of the Cartesian Product of K_2 with Special Graphs

Ali A. Ali **Asma S. Aziz**

College of Computer Science and Mathematics

University of Mosul, Iraq

Received on: 24/03/2008 **Accepted on: 11/06/2008**

ABSTRACT

Let G be a k_0-connected graph, and let $d_w(u,v)$, $1 \le w \le k_0$, be the w- width distance between the two vertices u,v in G. The w-Wiener polynomial of the width distance of G is defined by:

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

The w-Wiener polynomials of the Cartesian product of K_2 with Complete graph K_p, Star S_p, Complete bipartite graph $K_{r,s}$ and path P_r, are obtained in this paper. The diameter with respect to the width distance-w, and the Wiener index for each such graphs are also obtained.

Keywords: Wiener Polynomials, Width Distance, Wiener index.

متعددات حدود وينر–w للمسافة العرضية للجداء الديكارتي ل K_2 مع بيانات خاصة

علي عزيز علي **اسماء صلاح عزيز**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2008/03/24 **تاريخ قبول البحث: 2008/06/11**

الملخص

ليكن G بيانا متصلاً عامل إتصاله k_0 وأن $1 \le w \le k_0$، وأن $d_w(u,v)$ هي المسافة العرضية–w بين الرأسين u وv في G . تُعرف متعددة حدود وينر –w نسبة للمسافة العرضية–w على أنها

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

يتضمن هذا البحث إيجاد متعددة حدود وينر –w نسبة للمسافة العرضية -w للجداء الديكارتي ل K_2 مع كل من البيان التام K_p، نجمة S_p ، البيان الثنائي التجزئة التام $K_{r,s}$ ودرب P_r كما تضمن البحث ايجاد القطر بالنسبة إلى المسافة العرضية-w وايجاد دليل وينر لكل من هذه البيانات.

الكلمات المفتاحية: متعددات حدود وينر، المسافة العرضية، دليل وينر.

1. المقدمة

لأجل التعرف على المفاهيم والرموز غير المعرفة هنا اطلع على المصادر [4,5,6] . ليكن u و v أي رأسين في بيان متصل G، تعرف حاوية u و v على أنها مجموعة دروب منفصلة داخليا والتي تصل بين u و v ، ويرمز لها $C(u,v)$.

يعرف عرض (width) الحاوية $C(u,v)$ على أنه عدد الدروب u-v في $C(u,v)$ ويرمز له $w(C(u,v))$، أي أن

$$w(C(u,v)) = |C(u,v)|$$

كما يعرف طول الحاوية $C(u,v)$ على أنه الطول لأطول درب في الحاوية ويرمز له $\ell(C(u,v))$. وأخيرا لأجل عدد صحيح موجب w نعرف المسافة العرضية أو (المسافة-w) بين رأسين u و v في بيان G [7] على أنها

$$d_w(u,v|\,G) = \min_{C(u,v)} \ell(C(u,v)) \qquad ...(1.1)$$

حيث أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات $C(u,v)$ ذات العرض w. وعندما لا يكون هناك التباس فسوف نعبر عن المسافة العرضية بين u و v بـ $d_w(u,v)$.

من الواضح أنه عندما يكون $w=1$ فان المسافة-w تصبح المسافة الاعتيادية بين u وv. وفي بحثنا سنحاول دراسة المسافة-w عندما $w \geq 2$ أما الحد الأعلى لـw فانه عامل الاتصال k_0 [5]للبيان G. أي أن $1 \leq w \leq k_0$، وسوف نستبعد حالة كون w=1 من دراستنا لأنها تمثل المسافة الاعتيادية والتي لها دراسات كثيرة ومتقدمة. أما لو كانت $w > k_0$ فان المسافة $d_w(u,v)$ تعد غير معرفة. عندما $w \neq 1$ فسوف نأخذ الرأسين u و v مختلفين ولا نأخذ حالة كون u =v.

يعرف القطر-w لبيان G والذي يرمز له بـ $\text{diam}_w(G)$ أو اختصارا بـ $\delta_w(G)$ أو δ_w بأنه أكبر المسافات العرضية-w قي G أي أن:

$$\delta_w(G) = \max_{u,v\in V(G)} d_w(u,v|G) \qquad ...(1.2)$$

واضح أن $\delta_w(G) \geq \delta(G)$

أما دليل وينر-w فهو مجموع المسافات العرضية-w في البيان G أي:

$$W_w(G) = \sum_{u,v\in V} d_w(u,v|G) \qquad .....(1.3)$$

واعماما لمتعددة حدود وينر نسبة إلى دالة المسافة الاعتيادية d [6]نعرف متعددة حدود وينر-w نسبة إلى دالة المسافة العرضية d_w كالأتي:

$$W_w(G;x)=\sum_{u,v\in V}x^{d_w(u,v)} \qquad \text{.....(1.4)}$$

فإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي تساوي المسافة العرضية-w بينها k فأن:

$$W_w(G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w}C_w(G,k)\,x^k \qquad \text{...(1.5)}$$

لأنه عندما يكون $w\geq 2$ فان المسافة-w لا تقل عن 2.

من الواضح أن

$$W_w(G)=\frac{d}{dx}W_w(G;x)\Big|_{x=1}=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w}k\,C_w(G,k) \qquad \text{...(1.6)}$$

ليكن v رأسا في بيان متصل G ولنفرض أن $C_w(v,G,k)$ يمثل عدد رؤوس G التي كل منها تبعد بمسافة عرضية-w تساوي k عن الرأس v إذ أن $k\geq 2$ و $w\geq 2$.

واضح أن

$$\sum_{v\in V}C_w(v,G,k)=2C_w(G,k) \qquad \text{...(1.7)}$$

لكل $2\leq k\leq \delta_w$

وتعرف متعددة حدود وينر-w بالنسبة إلى الرأس v [3] بـ

$$W_w(v,G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w}C_w(v,G,k)\,x^k \qquad \text{...(1.8)}$$

من (1.5) و(1.7) و(1.8) نستنتج أن:

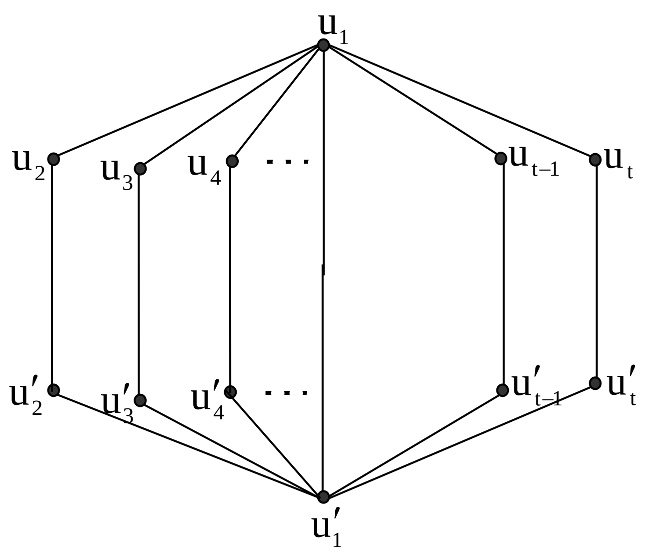
$$\sum_{v\in V}W_w(v,G;x)=2W_w(G;x) \qquad \text{...(1.9)}$$

تعريف[1]: يقال لبيانG أنه منتظم نسبة إلى المسافة العرضية$-w$ إذا كان لكل k، $C_w(v,G,k)$ له القيمة نفسها لكل رأس v في G. أي أن عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة عرضية$-w$ قيمتها k عن الرأس v هو نفسه بالنسبة لكل v في G.

في [1]و[2] أوجدنا متعددة حدود وينر ودليل وينرنسبة للمسافة العرضية لبعض البيانات الخاصة والمركبة بشكل معين ,وفي هذا البحث نجد متعددة حدود وينر نسبة إلى المسافة العرضية $-w$ لبيانات ناتجة من الجداء الديكارتي ل $K2$ معSp , Kr,s Kp ,و Pr 0

2. الجداء الديكارتي لبيان نجمة مع البيان K_2

بيان نجمة ويرمز له S_t هو بيان ثنائي التجزئة تام $K_{1,t-1}$ أما البيان المتكون من عملية الضرب لـ K_2 مع S_t فان عدد رؤوسه هو $2t$. وعدد حافاته $(3t-2)$ وكما هو مبين في الشكل (2 .1).



الشكل (2.1) البيان $K_2 \times S_t$

من الواضح أن عامل الاتصال للبيان $K_2 \times S_t$ هو 2 وأن القطر للمسافة العرضية-2 لهذا البيان هو 4. المبرهنة الآتية تعطينا متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $K_2 \times S_t$.

مبرهنة(2.1): لكل $t \geq 3$ فان

$$W_2(K_2 \times S_t; x) = 2(t-1)x^2 + t^2x^3 + (t-1)(t-2)x^4,$$

البرهان:

نجزئ مجموعة الرؤوس إلى المجموعتين الآتيتين:

$$V_1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_t\} \quad , \quad V_2 = \{u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_t\}$$

ومن أجل إيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 لدينا الحالات الاتية:

(1) إذا كان $u, v \in V_1 - \{u_1\}$ فان الحاوية الصغرى $C(u,v)$ تتكون من الدرب (u, u_1, v) وهو بطول 2 والدرب (u, u', u'_1, v', v) الذي بطول4. وعليه يكون

$$d_2(u,v) = 4 \ , \quad u, v \in V_1 - \{u_1\} \qquad \dots(2.1)$$

وبالمثل، فان

$$d_2(u,v) = 4 \ , \quad u, v \in V_2 - \{u'_1\} \qquad \dots(2.2)$$

(2) إذا كان لكل رأس $u \in V_1 - \{u_1\}$ فان هنالك حاوية صغرى $C(u_1, u)$ تتكون من الحافة u_1u ودرب بطول 3 وهو (u_1, u'_1, u', u) ، إذا

$$d_2(u_1, u) = 3 \ , \quad u \in V_1 - \{u_1\} \qquad \dots(2.3)$$

وبالمثل، فان

$$d_2(u'_1, u') = 3 \ , \quad u' \in V_2 - \{u'_1\} \qquad \dots(2.4)$$

(3) إذا كان $u \in V_1 - \{u_1\}$ و $v \in V_2 - \{u'_1\}$ فان هنالك حالتين هما:

(أ) إذا كان u وv متجاورين فان هنالك حاوية صغرى $C(u,v)$ تتكون من الحافة uv مع درب (u, u_1, u'_1, v) بطول3.

(ب) إذا كان u وv غير متجاورين، وليكن $u = u_i$ ، $v = u'_j$ ، $i \neq j$. فان هنالك حاوية صغرى $C(u,v)$ تتكون من الدربين (u_i, u_1, u_j, u'_j) و (u_i, u'_i, u'_1, u'_j) وكل منهما بطول 3، إذا

$$d_2(u,v) = 3 \quad , \quad u \in V_1 - \{u_1\} \quad , \quad v \in V_2 - \{u'_1\} \qquad \dots(2.5)$$

(4) إذا كان لكل رأس $u \in V_1 - \{u_1\}$ فالحاوية الصغرى $C(u, u_1')$ تتكون من الدربين (u, u_1, u_1') و (u, u', u_1') وكلاهما بطول 2 عليه يكون:

$$d_2(u, u_1') = 2 \ , \ \forall \ u \in V_1 - \{u_1\} \qquad ..(2.6).$$

وبالمثل فان

$$d_2(u_1, u') = 2 \ , \ \forall \ u' \in V_2 - \{u_1'\} \qquad ...(2.7)$$

وأخيرا بقي أن نذكر أن

$$d_2(u_1, u_1') = 3$$

عدد أزواج الرؤوس (u,v) لكل من (2.1) و (2.2) هو $\binom{t-1}{2}$ وعليه يكون

$$C_2(K_2 \times S_t, 4) = 2\binom{t-1}{2} = (t-1)(t-2) \qquad ...(2.8)$$

نلاحظ أن عدد أزواج الرؤوس (u,v) لكل من (2.3) و(2.4) هو $(t-1)$، كما أن عددها للحالة (2.5) هو $(t-1)^2$. وعليه يكون

$$C_2(K_2 \times S_t, 3) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1 = t^2 \qquad ...(2.9)$$

وعدد أزواج الرؤوس (u,v) لكل من (2.6) و (2.7) فهو $(t-1)$ وعليه فان

$$C_2(K_2 \times S_t, 2) = 2(t-1) \qquad ...(2.10)$$

وأخيرا، من (2.8)، (2.9) و (2.10) نحصل على $W_2(K_2 \times S_t; x)$ كما هي معطاة في نص المبرهنة.

#

النتيجة الآتية مباشرة من المبرهنة 2.1 .

نتيجة (2.2): دليل وينر للمسافة العرضية−2 للبيان $K_2 \times S_t$ هو

$$W_2(K_2 \times S_t) = 7t^2 - 8t + 4 .$$

#

3. الجداء الديكارتي لبيان تام K_p مع K_2

يتكون البيان $K_2 \times K_p$ من اتحاد K_p مع نسخة أخرى له، K'_p، ومع مجموعة الحافات $\{v_i v'_i : i = 1,2, \dots, p\}$ حيث أن:

$$V(K_p) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \ , \ V(K'_p) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\}$$

من الواضح أن رتبة $K_2 \times K_p$ هي $2p$ وحجمه هو p^2، كما نلاحظ أن عامل الاتصال له هو p، أي يوجد بين كل رأسين مختلفين فيه u,v هنالك p من الدروب u-v المنفصلة داخليا، وبذلك فان لدينا $2 \le w \le p$. ولأجل إيجاد متعددة حدود وينر للبيان $K_2 \times K_p$ بالنسبة الى المسافة العرضية- w سوف نعالج ثلاث حالات استنادا إلى قيم w وهي $w = 2$، $3 \le w \le p-1$ و $w = p$.

عبارة (3.1): متعددة حدود وينر للمسافة العرضية- 2 للبيان $K_2 \times K_p$ هي:

$$W_2(K_2 \times K_p; x) = 2p(p-1)x^2 + px^3$$

البرهان:

من الواضح أن المسافة العرضية- 2 بين أي رأسين مختلفين من رؤوس K_p تساوي 2، كما هي المسافة العرضية- 2 لأي رأسين مختلفين من رؤوس K'_p وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $p(p-1)$.

وفيما يتعلق بالرأسين v_i و v'_j، حيث $i \ne j$، فان هنالك حاوية صغرى بطول 2 تتكون من الدربين (v_i, v'_i, v'_j) و (v_i, v_j, v'_j) وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $p(p-1)$. إذا

$$C_2(K_2 \times K_p, 2) = 2p(p-1)$$

وأخيرا، فيما يتعلق بالرأسين v_i و v'_i، إذ أن $1 \le i \le p$، فان هنالك حاوية صغرى بطول 3 تتكون من الحافة $v_i v'_i$ والدرب (v_i, v_j, v'_j, v'_i)، حيث $i \ne j$. عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو p. إذا

$$C_2(K_2 \times K_p, 3) = p$$

وبهذا يتم البرهان.

#

عبارة (3.2): متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−w، حيث أن $3 \le w \le p-1$ ، للبيان $K_2 \times K_p$ هي

$$W_w(K_2 \times K_p; x) = p(p-1)x^2 + p^2x^3$$

البرهان:

واضح أن لكل رأسين مختلفين v_i ، v_j من K_p (وكذلك لكل رأسين مختلفين من K'_p) يوجد $(p-2)$ من الدروب $v_i - v_j$ ، المنفصلة داخليا وكل منها بطول 2 فضلا عن الحافة $v_i v_j$ وبذلك فان لكل $3 \le w \le p-1$ توجد حاوية صغرى $C(v_i, v_j)$ بطول 2. عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $p(p-1)$.

ونلاحظ أن لكل رأسين v_i ، v'_i ، حيث $1 \le i \le p$ ، يوجد $(p-1)$ من الدروب $v_i - v'_i$ المنفصلة داخليا وبطول 3 بالصيغة (v_i, v_k, v'_k, v'_i) حيث $k \ne i$ و $1 \le k \le p$ ، فضلا عن الحافة $v_i v'_i$. وهكذا لكل $3 \le w \le p-1$ توجد حاوية صغرى $C(v_i, v'_i)$ بطول 3. عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو p.

وأخيرا فان لكل رأسين مختلفين v_i ، v'_j ، حيث أن $i \ne j$ ، يوجد دربان $v_i - v'_j$ بطول 2 هما (v_i, v_j, v'_j) و (v_i, v'_i, v'_j) فضلا عن $(p-2)$ من الدروب $v_i - v'_j$ كل منها بطول 3 بالصيغة (v_i, v_k, v'_k, v'_j) ، حيث أن $k \ne i, j$. من الواضح أن هذه الدروب $v_i - v'_j$ كلها منفصلة داخليا. وعليه، فان لكل $3 \le w \le p-1$ توجد حاوية صغرى $C(v_i, v'_j)$ بطول 3. وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $p(p-1)$.

مما تقدم نستنتج أن

$$C_w(K_2 \times K_p, 2) = p(p-1)$$
$$C_w(K_2 \times K_p, 3) = p(p-1) + p = p^2$$

وبهذا يتم البرهان.

#

عبارة (3.3): متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−p لبيان $K_2 \times K_p$ هي:

$$W_p(K_2 \times K_p; x) = p(2p-1)x^3$$

البرهان:

إن لكل رأسين مختلفين v_i و v_j يوجد درب بطول واحد، و $(p-2)$ من الدروب $v_i - v_j$، بطول 2 ودرب واحد أخر فقط بطول 3 بالصيغة (v_i, v_i', v_j', v_j) هذه الدروب $v_i - v_j$ كلها منفصلة داخليا وعددها p. إذا

$$d_p(v_i, v_j) = 3 \ , \quad i \neq j \ , \ 1 \leq i, j \leq p$$

وبالمثل

$$d_p(v_i', v_j') = 3 \ , \quad i \neq j \ , \ 1 \leq i, j \leq p$$

وكما ذكرنا في برهان العبارة 3.2.2 فاننا نستنتج أن

$$d_p(v_i, v_i') = 3 \ , \quad 1 \leq i \leq p$$

$$d_p(v_i, v_j') = 3 \ , \quad i \neq j \ , \ 1 \leq i, j \leq p$$

وعليه، إذا كان لكل رأسين u و v في $K_2 \times K_p$ فان

$$d_p(u, v) = 3$$

وبهذا يتم البرهان.

#

نتيجة (3.4): دليل وينر للمسافة العرضية-w للبيان $K_2 \times K_p$ هو:

$$W_w(K_2 \times K_p) = \begin{cases} p(4p-1) \ , \text{ when } w = 2 \\ p(5p-2) \ , \text{when} 3 \leq w \leq p-1 \\ 3p(2p-1), \text{when } w = p \end{cases}$$

#

4. الجداء الديكارتي لبيان ثنائي التجزئة تام $K_{r,s}$ و K_2

لنفرض أن $V(K_{r,s})$ مجزأة إلى المجموعتين المستقلتين

$$V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \ , \ V_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$$

وليكن $K_{r,s}'$ نسخة أخرى لـ $K_{r,s}$ وإن المجموعتين المستقلتين لرؤوسه هما

$$V_1' = \{v_1', v_2', \ \ldots \ , v_s'\} \quad , \quad V_2' = \{u_1', u_2', \ \ldots \ , u_r'\}$$

عندئذ يكون $K_2 \times K_{r,s}$ هو البيان الناتج من اتحاد $K_{r,s}$ مع $K'_{r,s}$ ومع مجموعة الحافات $\{v_i v'_i, u_j u'_j : i = 1,2, \dots, s \;;\; j = 1,2, \dots, r\}$

من الواضح أن $p(K_2 \times K_{r,s}) = 2(r+s)$ ، $q(K_2 \times K_{r,s}) = 2rs + r + s$.

وأن عامل الاتصال هو $s+1$ بفرض أن $s \le r$. وسوف نجد متعددة الحدود بالنسبة الى المسافة العرضية−w للبيان $K_2 \times K_{r,s}$ ولقيم w في ثلاث حالات هي $w = 2$ ، $3 \le w \le s$ و $w = s+1$.

(أولا): إذا كان $2 \le w \le s$ فان:

(1) لأي رأسين $u, v \in V(K_{r,s})$ وكذلك أي رأسين $u', v' \in V(K'_{r,s})$ فانه بموجب البحث [1]، نحصل على

$$\sum_{u,v \in V(K_{r,s})} x^{d_w(u,v)} + \sum_{u',v' \in V(K'_{r,s})} x^{d_w(u',v')} = 2\left[\binom{r}{2} + \binom{s}{2}\right]x^2 + 2rsx^3 \qquad \dots(4.1)$$

(2) نجد المسافة العرضية−w لأي رأس من $K_{r,s}$ مع أي رأس من $K'_{r,s}$ وهذه تتضمن الحالات الأربعة الاتية:

(أ) لكل رأس v_i من رؤوس V_1 مع كل رأس v'_j من V'_1 يوجد r من الدروب $v_i - v'_j$ كل منها بطول 3، بالصيغة (v_i, u_k, u'_k, v'_j) ، حيث $1 \le k \le r$ ، عليه يكون

$$d_w(v_i, v'_j) = 3 \quad , \; 1 \le i, j \le s \qquad \dots(4.2)$$

وعدد أزواج الرؤوس التي تحقق هذه العلاقة هو s^2 .

(ب) بالمثل لكل رأس u_i من رؤوس V_2 مع كل رأس u'_j من رؤوس V'_2 يوجد s من الدروب $u_i - u'_j$ كل منها بطول 3، وبالصيغة (u_i, v_k, v'_k, u'_j) ، $1 \le k \le s$ ، عليه نحصل على

$$d_w(u_i, u'_j) = 3 \quad , \; 1 \le i, j \le r \qquad \dots(4.3)$$

(ج) ليكن $v_i \in V_1$ وليكن $u'_j \in V'_2$ حيث $1 \le i \le s$ و $1 \le j \le r$. المسافات العرضية−w هنا تختلف حسب قيم w إذ تكون لدينا حالتان فقط وهما:

1− عندما w=2 فان الحاوية $C(v_i, u'_j)$ تحوي دربين كل منهما بطول 2 وهما (v_i, v'_i, u'_j) و (v_i, u_j, u'_j) ، ومنها نحصل على:

$$d_2(v_i, u'_j) = 2 \quad , \; 1 \le i \le s \;\; , \; 1 \le j \le r \qquad \dots(4.4)$$

عدد أزواج الرؤوس (v_i, u'_j) التي تحقق هذه العلاقة هو rs.

2- عندما $3 \le w \le s$ فان الحاوية $C(v_i, u'_j)$ تحوي فضلا عن الدربين المذكورين في 1 على الدروب $(v_i, u_k, u'_k, v'_n, u'_j)$ حيث $n \ne i$، $1 \le n \le s$، $k \ne j$، $1 \le k \le r$، وطول كل واحد من هذه الدروب التي عددها $s-1$ يساوي 4 وهي منفصلة داخليا عليه يكون

$$d_w(v_i, u'_j) = 4 \quad , 1 \le i \le s \quad , \quad 1 \le j \le r \qquad ...(4.5)$$

وعدد أزواج الرؤوس التي تحقق هذه العلاقة هو rs.

(د) بطريقة مشابهة لما ذكر في (ج) نحصل على المسافات لأي من رؤوس V_2 مع أي من رؤوس V'_1 أي أن

$$d_2(u_i, v'_j) = 2 \quad , 1 \le i \le r \quad , \quad 1 \le j \le s \qquad ...(4.6)$$

وعدد أزواج الرؤوس التي تحقق هذه العلاقة هو rs.

أيضا عندما $3 \le w \le s$ يكون

$$d_w(u_i, v'_j) = 4 \quad , 1 \le i \le r \quad , \quad 1 \le j \le s \qquad ...(4.7)$$

بالاستناد إلى العلاقات (4.1)، (4.2)، (4.3)، (4.4) و(4.6) وعدد أزواج الرؤوس التي تحققها نحصل على متعددة الحدود للمسافة العرضية-2 للبيان $K_2 \times K_{r,s}$. وهي المذكورة في العبارة الاتية:

عبارة (4.1):

$$W_2(K_2 \times K_{r,s}; x) = (r+s)(r+s-1)x^2 + (r+s)^2 x^3$$

#

ومن العلاقات (4.1)، (4.2)، (4.3)، (4.5) و (4.7) وحسب عدد الأزواج التي تحققها نحصل على العبارة الاتية:

عبارة (4.2): لكل $3 \le w \le s$ فان

$$W_w(K_2 \times K_{r,s}; x) = [r(r-1) + s(s-1)]x^2 + (r+s)^2 x^3 + 2rsx^4$$

#

(ثانيا): نفرض أن w=s+1. لدينا حالتان وهما r =s و $r > s$.

(أ) نفرض أن r =s.

لكل v_i و v_j في V_1 يوجد s من الدروب $v_i - v_j$ المنفصلة داخليا وكل منها بطول 2، ويوجد درب أخر منفصل عنها داخليا وبطول 4 وهو الدرب $(v_i, v'_i, u'_j, v'_j, v_j)$ حيث أن $1 \le j \le r$. إذا

$$d_{s+1}(v_i, v_j) = 4 \quad , i, j = 1,2, \dots, s \qquad \dots(4.8)$$

وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $s(s-1)/2$.

وبالمثل لكل u_i و u_j ، $i \ne j$، يكون

$$d_{s+1}(u_i, u_j) = 4 \qquad \dots(4.9)$$

وعدد أزواج هذه الرؤوس هو $s(s-1)/2$ أيضا.

وبالمثل لكل رأسين v'_i ، v'_j ولكل رأسين u'_i ، u'_j ، $i \ne j$ ، يكون

$$d_{s+1}(v'_i, v'_j) = d_{s+1}(u'_i, u'_j) = 4 \qquad \dots(4.10)$$

لكل رأسين v_j ، u_i توجد حاوية صغرى $C(u_i, v_j)$ بطول 3 مكونة من درب بطول 1 وs من الدروب بطول 3. إذا

$$d_{s+1}(u_i, v_j) = 3 \quad , \quad i, j = 1,2, \dots, s \qquad \dots(4.11)$$

وعدد هذه الأزواج هو s^2. وبالمثل

$$d_{s+1}(u'_i, v'_j) = 3 \quad , \quad i, j = 1,2, \dots, s \qquad \dots(4.12)$$

لكل v'_i ، v_i ، توجد حاوية صغرى $C(v_i, v'_i)$ مكونة من درب بطول واحد مع s من الدروب $v_i - v'_i$ المنفصلة داخليا بالصيغة (v_i, u_j, u'_j, v'_i) ، حيث $j = 1,2, \dots, s$ وعليه، فان

$$d_{s+1}(v_i, v'_i) = 3 \quad , \quad i = 1,2, \dots, s \qquad \dots(4.13)$$

وبالمثل

$$d_{s+1}(u_i, u'_i) = 3 \quad , \quad i = 1,2, \dots, s \qquad \dots(4.14)$$

لكل v'_j ، $i, j = 1,2, \dots, s$ ، $d_{s+1}(u_i, u'_j) = 3$ ، $i \ne j$ ، توجد حاوية صغرى $C(v_i, v'_j)$ مكونة من s+1 من الدروب المنفصلة داخليا وكل منها بطول 3، وهذه هي:

(v_i, u_s, v_j, v'_j) , (v_i, v'_i, u'_s, v'_j) , (v_i, u_k, u'_k, v'_j) , $k = 1,2, \dots, s-1$.

وعليه، فان لكل $i \ne j$ ،

$$d_{s+1}(v_i, v'_j) = 3 \quad , \quad i, j = 1,2, \dots, s \qquad \dots(4.15)$$

وبالمثل

$d_{s+1}(u_i, u'_j) = 3 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, s$ ...(4.16)

لكل رأسين u'_j ، v_i ، توجد حاوية صغرى $C(v_i, u'_j)$ مكونة من دربين $v_i - u'_j$ بطول 2 و $s-1$ من الدروب $v_i - u'_j$ كل منهما بطول 4، وهذه الدروب هي:

(v_i, u_j, u'_j) , (v_i, v'_i, u'_j) , $(v_i, u_k, u'_k, v'_h, u'_j)$, $k \neq j$, $h \neq i$

وعليه، فان

$d_{s+1}(v_i, u'_j) = 4 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, s$ ...(4.17)

وبالمثل

$d_{s+1}(u_i, v'_j) = 4 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, s$ ...(4.18)

وأخيرا، من (4.18)–(4.8) نحصل على العبارة الاتية:

عبارة (4.3):

$$W_{s+1}(K_2 \times K_{s,s}; x) = 2s(2s-1)x^4 + 4s^2x^3$$

#

(ب) نفرض أن $s < r$.

لكل v_i و v_j في V_1 يوجد $s+1 \leq r$ من الدروب $v_i - v_j$ المنفصلة داخليا بطول 2، وبذلك فان

$d_{s+1}(v_i, v_j) = 2 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, s$ ...(4.19)

وبالمثل

$d_{s+1}(v'_i, v'_j) = 2 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, s$ ...(4.20)

ولكل u_i و u_j في V_2 نجد أن

$d_{s+1}(u_i, u_j) = 4 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, r$ ...(4.21)

وكذلك لكل u'_i و u'_j في V'_2

$d_{s+1}(u'_i, u'_j) = 4 \quad , \quad i, j = 1,2, \ldots, r$ ...(4.22)

كما سبق أن أوضحنا في حالة(أ).

ولكل رأسين u_j و v_i ، توجد حاوية صغرى $C(v_i, u_j)$ تتألف من الحافة $v_i u_j$ و s من الدروب $v_i - u_j$ بطول 3. وعليه

$$d_{s+1}(v_i, u_j) = 3 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,s \ , \ j = 1,2,\ldots,r \qquad \ldots(4.23)$$

وبالمثل

$$d_{s+1}(v'_i, u'_j) = 3 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,s \ , \ j = 1,2,\ldots,r \qquad \ldots(4.24)$$

ولكل رأسين v_i و v'_j ، يوجد r من الدروب $v_i - v'_j$ بطول 3. وعليه

$$d_{s+1}(v_i, v'_j) = 3 \quad , \quad i, j = 1,2,\ldots,s \qquad \ldots(4.25)$$

وكما في حالة أ، فان

$$d_{s+1}(u_i, u'_j) = 3 \quad , \quad i, j = 1,2,\ldots,r \qquad \ldots(4.26)$$

ولكل رأسين u'_j و v_i ، توجد حاوية صغرى $C(v_i, u'_j)$ تتكون من درب بطول 2. و s من الدروب $v_i - u'_j$ المنفصلة داخليا وكل منها بطول 4. وعليه

$$d_{s+1}(v_i, u'_j) = 4 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,s \ , \ j = 1,2,\ldots,r \qquad \ldots(4.27)$$

وبالمثل، فان

$$d_{s+1}(u_i, v'_j) = 4 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,r \ , \ j = 1,2,\ldots s \qquad \ldots(4.28)$$

من (4.19) والى (4.28) وباحتساب عدد أزواج الرؤوس لكل منها نحصل على العبارة الاتية:

عبارة (4.4): إذا كان $r > s$ فان

$$W_{s+1}(K_2 \times K_{r,s}; x) = r(r + 2s - 1)x^4 + (r + s)^2 x^3 + s(s - 1)x^2$$

#

ولأجل إعطاء متعددة الحدود للمسافة العرضية-w للبيان $K_2 \times K_{r,s}$ بجميع حالاتها المذكورة في العبارات 4.1– 4.4 نضع المبرهنة الاتية:

مبرهنة (4.5): إذا كان $2 \le s \le r$ فان

$$W_w(K_2 \times K_{r,s}; x) = \begin{cases} (r+s)(r+s-1)x^2 + (r+s)^2 x^3 , & \text{if } w = 2 \\ (r^2 + s^2 - r - s)x^2 + (r+s)^2 x^3 + 2rsx^4 , & \text{if } 3 \le w \le s \\ 4s^2 x^3 + 2s(2s-1)x^4 , & \text{if } w = s+1 , r = s \\ s(s-1)x^2 + (r+s)^2 x^3 + r(r+2s-1)x^4 , & \text{if } w = s+1 , r > s \end{cases}$$

#

يمكن بسهولة الحصول على دليل وينر للمسافة العرضية-w للبيان $K_2 \times K_{r,s}$ كما في النتيجة الاتية:

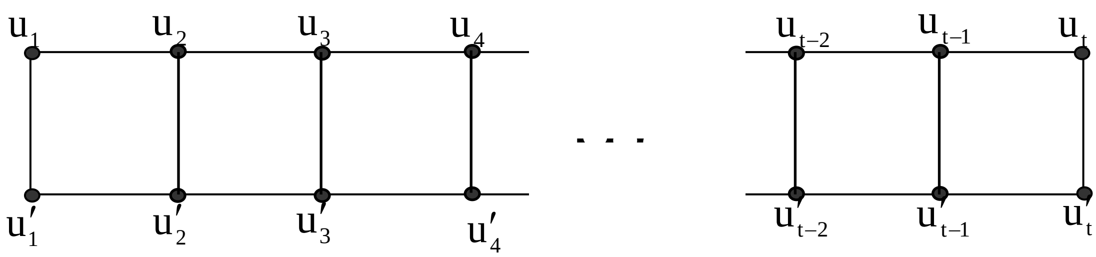
نتيجة (4.6):

$$W_w(K_2 \times K_{r,s}) = \begin{cases} (r+s)(5r+5s-2) \ , & \text{if } \ w=2 \\ (r+s)(5r+5s-2)+4rs \ , & \text{if } \ 3 \le w \le s \\ 4s(7s-2) \ , & \text{if } \ w=s+1 \ , \ r=s \\ 7r^2+5s^2+14rs-4r-2s \ , & \text{if } \ w=s+1 \ , \ r>s \end{cases}$$

#

5. الجداء الديكارتي لدرب P_t و K_2

ليكن P_t دربا برتبة $t \ge 2$ ومجموعة رؤوسه بالترتيب هي $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$. فمن الواضح أن $G = K_2 \times P_t$ هو البيان المبين في الشكل 3.4.1. ومن الواضح أن عامل الاتصال لـ $K_2 \times P_t$ هو 2.



الشكل (5.1) البيان $K_2 \times P_t$

مبرهنة (5.1): إذا كان $t \ge 2$ فان متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $K_2 \times P_t$ هي:

$$W_2(K_2 \times P_t ; x) = t\,x^3 + 2(x+x^2)\sum_{k=1}^{t-1}(t-k)x^k$$

البرهان:

لاحظ أن البيان $G = K_2 \times P_t$ يمتلك الخاصية الاتية:

$$W_2(u_i, G; x) = W_2(u'_i, G; x) \ , \ 1 \le i \le t \qquad ...(5.1)$$

ومن أجل ذلك لا بد أن نشير إلى أن لكل $1 \le i, j \le t$ ، $i \ne j$. فان

$$d_2(u_i, u_j) = 2 + d(u_i, u_j) \qquad ...(5.2)$$

$$d_2(u_i,u'_j)=1+d(u_i,u_j) \qquad ...(5.3)$$

$$d_2(u_i,u'_i)=3 \qquad ...(5.4)$$

حيث أن $d(u_i,u_j)$ هي المسافة في الدرب P_t ، إذا

$$d(u_i,u_j)=|j-i|$$

نستنتج من العلاقات (5.2)، (5.3) و(5.4) أن

$$W_2(u_i,G;x)=x^2\sum_{j=1,j\neq i}^{t}x^{d(u_i,u_j)}+x\sum_{j=1,j\neq i}^{t}x^{d(u_i,u_j)}+x^3$$

$$=x^3+(x^2+x)\sum_{j=1,j\neq i}^{t}x^{d(u_i,u_j)}$$

وبأخذ المجموع لقيم i حيث $1\leq i\leq t$ نحصل على

$$\sum_{i=1}^{t}W_2(u_i,G;x)=tx^3+(x^2+x)\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1,j\neq i}^{t}x^{d(u_i,u_j)}$$
$$=tx^3+2(x^2+x)(W(P_t;x)-t)$$

حيث أن [6]

$$W(P_t;x)=\sum_{k=0}^{t-1}(t-k)x^k$$

وبما أن:

$$W_2(G;x)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{t}W_2(u_i,G;x)+\sum_{i=1}^{t}W_2(u'_i,G;x)\right\}$$

وحسب العلاقة (5.1) نحصل على

$$W_2(G;x)=tx^3+2(x+x^2)\sum_{k=1}^{t-1}(t-k)x^k \qquad \#$$

نتيجة (5.2): دليل وينر للمسافة العرضية−2 لبيان $K_2\times P_t$ هو:

$$W_2(K_2\times P_t)=t(2t^2+9t-2)/3$$

البرهان:

باشتقاق متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان $K_2\times P_t$ بالنسبة إلى x وبالتعويض عن x =1، ومن ثم إجراء بعض التبسيط نحصل على الصيغة المذكورة.

#

المصادر

[1] A.A.Ali ,and A.S.Aziz(2007) ,"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of Some Special graphs " Al-Rafiden.J. ,Vol.4, Nol.2.

[2] A.A.Ali ,and A.S.Aziz ,"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of a Square Path ,a Square Cycle ,and an m-Cube " Al-Rafiden .J. of Computer Sciences and Mathematics ,Accepted.

[3] A.S.Aziz (2007), "The Width Distance and the w-Wiener polynomials of a graph", M. Sc. Thesis , Mosul University , Mosul.

[4] F. Buckley and F. Harary (1990), Distance in Graphs , Addison-Wesley , Redwood

[5] G. Chartrand and L. Lesniak (1986), Graphs and Digraphs , Wadsworth Inc. Belmont, California.

[6] I. Gutman (1993), "Some Properties of the Wiener Polynomial", Graph Theory Notes of New York, XXV, The New York Academy of Sciences , 13-18.

[7] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang (1996),"The Wiener Polynomial of a Graph" , Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969.