On Crossed Modules and Crossed Homomonphisms

Abdul Aali J. Mohammed **Manal E. Abd Fathi**
College of Education *College of Computer Science and Mathematics*
University of Mosul, Iraq

Received on: 22/11/2006 **Accepted on: 05/03/2007**

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the crossed modules and crossed homomonphisms, and since these concepts are related to the group actions on groups we presented these types of actions.

Keywords: Groups, modules, homomonphisms, crossed.

في المقاسات والتشاكلات التصالبية

عبد العالي جاسم محمد **منال إدريس عبد فتحي**
كلية التربية *كلية علوم الحاسبات والرياضيات*
جامعة الموصل *جامعة الموصل*

تاريخ استلام البحث: 22 /2006/11 **تاريخ قبول البحث: 2007/03/05**

الملخص

الغرض من هذا البحث هو دراسة المقاسات والتشاكلات التصالبية، ولصلة هذين المفهومين بأفعال الزمر على الزمر فقد استعرضنا هذا النوع من الأفعال.

الكلمات المفتاحية: الزمر، المقاسات، التشاكلات، التصالب.

1-المقدمة:

تم الحصول على الكثير من نظريات الزمر، وخاصة الجزء الذي يتعامل مع الزمر المنتهية، إذ تم الحصول عليه بالأصل من دراسة زمر التباديل. إذ إن بعض المفاهيم (مثل العناصر الثابتة والعناصر المثبتة) لا تظهر في نظرية الزمر المجردة ولكنها واضحة في زمر التباديل [10] لذا فمن الطبيعي أن يكون مفهوم أفعال الزمر المنتهية على مجموعات منتهية قد بدأ بتعريف فعل زمرة مثل G على مجموعة مثل Xعلى انه تشاكل زمري من G إلى $S_{|X|}$ زمرة التباديل على X .

عندما تكون كل من H و K زمرة فان AutK مجموعة التشاكلات من K على K هي زمرة جزئية من زمرة التباديل $S_{|X|}$ ، لذا فانه يمكن القول بان فعل الزمرة H على الزمرة K هو تشاكل زمري من الزمرة H إلى الزمرة AutK.

إن دراسة المقاسات والتشاكلات التصالبية تعتبر من التطبيقات التي لها ارتباط كبير في مفهوم أفعال الزمر على الزمر.

2-أفعال الزمر على الزمر Group actions on groups

يقدم هذا البند تعريفا لأفعال الزمر على الزمر مكافئا للتعريف الوارد في المقدمة، كذلك نستعرض بعضا من المفاهيم الأساسية كالأفعال المتعدية والحرة والمنتظمة، لمزيد من المعلومات الرجوع إلى [1] [8] [10].

<u>تعريف 2-1</u>:- [10]

لتكن كل من H و K زمرة نقول أن هناك فعل زمرتي أيسر للزمرة H على الزمرة K إذا كان لكل $h\in H$ و $k\in K$ يوجد عنصر وحيد مثل ${}^{h}k\in K$ بحيث أن لكل $k,k_1,k_2 \in K$, $h,h_1,h_2 \in H$

(i) ${}^{e}k=k$ ، (ii) ${}^{h_2}({}^{h_1}k)={}^{h_2h_1}k$ ، (iii) ${}^{h}(k_1k_2)={}^{h}k_1\,{}^{h}k_2$

عندئذ سنرمز للزمرة K بالرمز K زمرة - H ، وعند إهمال الشرط (iii) أي اعتبار K مجموعة نقول أن فعل الزمرة H يساري على المجموعة K .

بصورة مماثلة نعرف الفعل الزمرتي الأيمن لزمرة على زمرة، كما يمكن عد كل زمرة -H يمنى هي زمرة-H يسرى والعكس بالعكس وذلك وفق القاعدة ${}^{h}k=k^{h^{-1}}$ لكل $h\in H$ و $k\in K$.

المبرهنة التالية تظهر الربط بين التعريف (2-1) والتعريف الوارد في المقدمة.

<u>مبرهنة2-2:</u> [10]

(i) لتكن K زمرة -H، فان لكل $h\in H$ يوجد تطبيق $\rho_h: K\to K$ معرف بالقاعدة :

$$\rho_h(k)={}^{h}k \quad \forall k\in K$$

وهذا التطبيق هو تشاكل تقابلي كذلك التطبيق $\rho: H\to Autk$ المعرف بالقاعدة $\rho(h)=\rho_h$ لكل $h\in H$ هو تشاكل ويسمى التمثيل التشاكلي التقابلي للزمرة H المقترن بالفعل ρ هو اختصار (فعل الزمرة H على الزمرة K).

(ii) لتكن كل من K و H زمرة وليكن $\gamma: H\to AutK$ تشاكلا، فان للزمرة H فعلا على الزمرة K (K هي زمرة-H) معرفا بالقاعدة: ${}^{h}k=(\gamma(h))(k)$ لكل $\forall h\in H, k\in K$

والفعل المقترن هو γ .

<u>البرهان:</u>- نفس أسلوب البرهان في [10]

ملاحظة 2-3:

لتكن كل من H و K زمرة، يوجد على الأقل فعل واحد للزمرة H على زمرة K يسمى الفعل التافه (Trivial Action) معرف بالقاعدة : $^{h}k = k$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.

القضية التالية تعطينا احد الشروط التي تؤدي إلى كون الفعل التافه هو الفعل الوحيد لزمرة على زمرة.

قضية (2-4):

ليكن p و q عددين أولين بحيث أن $p \rangle q$ فان الفعل الوحيد لزمرة مرتبتها p على زمرة مرتبتها q هو الفعل التافه.

البرهان:

لتكن K زمرة مرتبتها q فإنها زمرة دوارة. لذا فان $\mathrm{AutK} = q - 1$.

لتكن Hزمرة مرتبتها p فإنها زمرة دوارة. لنفرض أن $K = \langle k \rangle$ و $H = \langle h \rangle$.

ليكن $\rho : H \to AutK$ فعلا للزمرة H على الزمرة K. لذا فان ρ تشاكل من الزمرة H إلى الزمرة AutK ولكن $|H| = p \rangle q \rangle q - 1 = |\mathrm{AutK}|$. فان ρ غير متباين. لذا فإن $\ker\rho \neq \{e_H\}$.

ولكن ρ ker زمرة جزئية من الزمرة H فانه يجب أن يكون ρ ker =H لان مرتبة H عدد أولي.

لذا فانه $\rho_x = \rho_{(x)} = \rho_e$ لكل $x \in H$. ومنها $^{h}k = \rho_h(k) = \rho_e(k) = {}^{e}k = k$

وهكذا فانه $h^s(k^r) = k^{(1)^s r} = k^r$ لكل $s, r \in z^+$حيث أن $0 \le r \le q$ لكل $0 \le s \le p$.

ومنها نستنتج أن فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه فقط.

من المفاهيم الأساسية في نظرية أفعال الزمر المدارات (orbits) والتعدي (transitivity). كذلك فان الأفعال المنتظمة هي من الأفعال المهمة أيضا وسنلاحظ أن فعل زمرة على زمرة يكون منتظما إذا وفقط إذا كانت كلتا الزمرتين مكونة من العنصر المحايد فقط.

تعريف 2-5: [7]

لتكن K زمرة -H فأنها تسمى متعدية transitive H-group (فعل H الزمرتي على K متعديا) إذا كانت $K \neq \varphi$ وان لأي $k_1, k_2 \in K$ يوجد $h \in H$ بحيث أن $^{h}k_1 = k_2$.

ليكن $k \in K$ فإن المجموعة $[k] = \{ {}^{h}k : h \in H \}$ تسمى مدار k وسوف نرمز لمجموعة مدارات K بالرمز [K]. لذا فان K هي زمرة -H متعدية إذا فقط إذا كان $|[K]| = 1$.

قضية مساعدة 2-6: لتكن K زمرة -H فان

(i) $^{h}e = e$ لكل $h \in H$ ، (ii) $(^{h}k)^{-1} = {}^{h}(k^{-1})$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.

البرهان:-

(i) ليكن $\rho : H \to AutK$ هو فعل الزمرة -H على الزمرة K معرف بالقاعدة:

$$\rho_{(h)} = \rho_h \text{ لكل } h \in H$$

حيث $\rho_h : K \to K$ هو تشاكل تقابلي معرف بالقاعدة $\rho_h(k) = {}^h k$ لكل $k \in K$.

لذا فان $\rho_h(e) = {}^h e$. ولكن $\rho_h(e) = e$ لكون ρ_h تشاكل وهذا معناه أن ${}^h e = e$

(ii) ${}^h(kk^{-1}) = {}^h(e) = e$ = $({}^h k){}^h(k^{-1})$ لكل $k \in K$ و $h \in H$

وكذلك ${}^h(k^{-1})\,({}^h k) = {}^h(k^{-1}k) = {}^h(e) = e$. لذا فانه $({}^h k)^{-1} = {}^h(k^{-1})$

قضية مساعدة 2-7 :-

لتكن K زمرة -H فإن

(i) $[e] = \{e\}$

(ii) $e \in [k]$ إذا وفقط إذا كان $k = e$

البرهان:- مباشر

تعريف2-8: [10]

لتكن K زمرة -H وليكن $k \in K$ يقال للمجموعة $stab_H(k) = \{h \in H : {}^h k = k\}$ بالمجموعة المثبتة للعنصر k.

تعريف2-9 : [7]

نقول أن K هي زمرة -H حرة (free H-group) (أو فعل H الزمرتي على K هو فعل حر) عندما يكون $stab_H(k) = \{e\}$ لكل $k \in K$

تعريف 2-10: [7]

إن فعل الزمرة H على الزمرة K يسمى فعلا منتظما (Regular) إذا كان هذا الفعل متعديا وحرا.

قضية 2-11:

فعل الزمرة H على الزمرة K يكون منتظما إذا وفقط إذا كانت K={e} و H={e}

البرهان:

ليكن فعل الزمرة H على الزمرة K منتظما.لذا فان هذا الفعل متعد وحر.

لنفرض أن$K \neq \{e\}$. لذا فانه يوجد على الأقل عنصر مثل $k \in K$ بحيث أن $k \neq e$.

بما أن $e \notin [k]$ فان $[e] \neq [k]$ وهذا يناقض فرضية كون K متعدية.لذا يجب أن يكون K={e}.

والآن ولكون الفعل حرا فانه $\underset{H}{\mathrm{stab}}(k)=\{e\}$ لكل $k \in K$

لنفرض أن $H \neq \{e\}$ لذا فانه يوجد عنصر مثل $h \in H$ حيث أن $h \neq e$.

لكون $^{h}e = e$ فإن $h \in \underset{H}{\mathrm{stab}}(e)$ وهذا يؤدي إلى أن $\underset{H}{\mathrm{stab}}(e) \neq \{e\}$.

وهذا مناقض لكون فعل الزمرة H على الزمرة K فعلا حرا.

لذا فانه يجب أن يكون $H = \{e\}$.

الآن نفرض أن $K = \{e\}$ و $H = \{e\}$ لذا فان فعل H على K هو متعد وحر، ومنها فعل H على K منتظم.

3-المقاسات التصالبية Crossed Modules

حظـــي مفهـــوم المقاســـات التصـــالبية باهتمـــام العديـــد مـــن العلمـــاء والبـــاحثين إذ يعد J.H.Whitehead [2] من أوائل من تطرق إلى دراسة هذا المفهوم، ودرس بعدها من قبل K.J.Norriv, R.Brown وآخرين كما في [3][4][9].

تعريف3-1:- [3]

المقاس التصالبي $\mathcal{M} = (\mu : M \to P)$ (أحيانا يرمز له بالرمز (M, P, μ)) ويتكون من التشاكل الزمري $\mu : M \to P$ مع فعل ايمن للزمرة P على الزمرة M بحيث يتحقق الشرطان:

(CM1): $\mu(m^{p}) = p^{-1}\mu(m)p$

(CM2): $m^{\mu(n)} = n^{-1}mn$

لكل $p \in P, m, n \in M$

أمثلة(3-2):

فيمـــا يـــأتي بعـــض الأمثلـــة الجبريـــة الأساســـية للمقاســـات التصـــالبية ونجـــدها فـــي المصادر [2][3][4].

1- لتكن الزمرة الابدالية M هي زمرة -P وليكن $\mathcal{M} = 0(: M \to P)$ حيث 0 هو التشاكل الصفري المعرف بالقاعدة: $0(m) = e$ لكل $m \in M$ فإن M مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الصفري.

2- لتكن M زمرة جزئية سوية في P ولتكن M زمرة -P بالفعل الاقتراني :-

$$m^{p} = p^{-1}mp \quad \text{لكل} \quad p \in P, m \in M$$

فإن التطبيق الاحتوائي $\mathcal{M}=(i:M\to P)$ هو مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الأقتراني.

3–لتكن M زمرة و $\rho_m:M\to M$ تشاكلا تقابليا ذاتيا داخليا حيث

$\rho_m(t)=mtm^{-1}$ لكل $m,t\in M$.

وليكن التشاكل $\mu:M\to Aut(M)$ معرفا بالقاعدة $\mu(m)=\rho_m$ لكل $m\in M$.

وليكن فعل الزمرة $Aut(M)$ على الزمرة M معرفا بالقاعدة:

$m^{\rho}t=\rho_{t(m)}=t^{-1}mt$ لكل $m,t\in M$. فإن

$\mathcal{M}=(\mu:M\to Aut(M))$

هو مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الداخلي.

قضية 3-3 :

لتكن $\mathcal{M}=(\mu:M\to P)$ مقاسا تصالبيا وان μ تشاكل تقالبي فإن $\mathcal{M}^{-1}=(\mu^{-1}:P\to M)$ هو مقاس تصالبي بالفعل المعرف بالقاعدة: $p^m=\mu(m^{-1})p\mu(m)$ لكل $m\in M,p\in P$.

البرهان:

بما ان μ تشاكل تقالبي فان μ^{-1} هو أيضا تشاكل تقالبي. P هي زمرة -M بالفعل المعرف أعلاه لأنه:

(i) $p^{e}=\mu(e^{-1})p\ \ \mu(e)=\mu(e)p\mu(e)=epe=p$

(ii) $(p^{m_1})^{m_2}=(\mu(m_1^{-1})p\ \ \mu(m_1))^{m_2}$

$$=\mu(m_2^{-1})\mu(m_1^{-1})p\mu(m_1)\mu(m_2)$$

$$=\mu(m_2^{-1}m_1^{-1})P\mu(m_1m_2)=\mu((m_1m_2)^{-1})p\mu(m_1m_2)=p^{(m_1m_2)}$$

(iii) $(p_1p_2)^m=\mu(m^{-1})p_1p_2\mu(m)$

$$=(\mu(m^{-1})p_1\mu(m))(\mu(m^{-1})p_2\mu(m))\ \ =p_1^m p_2^m$$

كذلك شرطا المقاس التصالبي

$$(CM1):\mu^{-1}((\mu(n))^m)=\mu^{-1}\left[\mu(m^{-1})\mu(n)\mu(m)\right]=\mu^{-1}\left[\mu(m^{-1}nm)\right]$$

$$=m^{-1}nm=m^{-1}\mu^{-1}(\mu(n))m$$

$$(CM2):p^{\mu^{-1}(p_1)}=\mu((\mu^{-1}(p_1))^{-1})=p\mu(\mu^{-1}(p_1))$$

$$= \mu(\mu^{-1}(p_1^{-1}))p \ \ \mu(\mu^{-1}(p_1)) = p_1^{-1}pp_1$$

لكل $m \in M, p, p_1 \in P$

عندما يكون لدينا μ تشاكل شامل من الزمرة M على الزمرة P بحيث ان نواة μ محتواة في مركز M فأن بالإمكان جعل μ مقاسا تصالبيا عند استخدام μ لتعريف فعل للزمرة P على الزمرة M كما في القضية الآتية:−

قضية3-4:−

ليكن $\mu : M \to P$ تشاكلا شاملا بحيث ان $\ker\mu \subseteq \text{cent } M$ فإن $\mathfrak{M}\ (= \mu : M \to P)$ هو تشاكل تصالبي.

البرهان:−

بما ان μ شامل فانه لكل $p \in P$ يوجد $m_p \in M$ بحيث $p = \mu\ (m_p)$.

يمكن ان نبرهن على ان μ هي زمرة -P بالفعل المعرف بالقاعدة.

$$m^p = m^{\mu(m_p)} = (m^{-1}{}_p)\,(m)(m_p) \quad \forall m \in M, p \in P$$

وذلك كما يأتي : من الضروري إثبات ان الفعل معرف تعريفا حسنا.

ليكن $r = \mu(m_1) = \mu(m_2)$ فان

$$\mu\ (m_1) = \mu\ (m_2) \Rightarrow \mu\ (m_2)(\ \mu\ (m_1)^{-1}) = e \ \Rightarrow\ \mu\ (m_2)\ \mu\ (m_1^{-1}) \ = e$$

$$\Rightarrow \mu\ (m_2\, m_1^{-1}) = e \Rightarrow m_2 m_1^{-1} \in \ker \mu$$

كذلك

(i) $m^r = m_1^{-1} m m_1 = m_2^{-1}\, m\, m_2$

$m = (m_2\, m_1^{-1})\, m (m_2\, m_1^{-1}) = m(m_2\, m_1^{-1})^{-1}\,(m_2\, m_1^{-1}) = m$

لأن $m_2 m_1^{-1} \in \ker \mu \subseteq \text{cent } (M)$

(ii) $m^e = m^{\mu(m_e)} = m_e^{-1} m m_e = m_e^{-1}\, m_e\, m = m$

$\forall m \in M \quad m_e \in \ker \mu \subseteq \text{cent } (M)$

لكل $\mu\ (m_1),\ \mu\ (m_2) \in P\ ,\ m \in M$

(iii) $(m^{\mu(m_1)})^{\mu(m_2)} = (m_1^{-1} m m_1)^{\mu(m_2)}$

$= m_2^{-1}\,(m_1^{-1}\, m m_1) m_2 = (m_2\, m_1)^{-1}\, m(m_1 m_2)$

$= m^{\mu(m_1 m_2)} = m^{\mu(m_1)\mu(m_2)}$

لكل $\mu\ (n) \in P\ , m_1, m_2 \in M$

(iv) $(m_1 m_2)^{\mu\,(m)} = m^{-1}(m_1 m_2) = (m^{-1} m_1 m)\,(m^{-1} m_2 m)$

$^{(m)}\mu_2 m\,^{(m)}\mu_1 m =$

لذا فأن M هي زمرة -P .

لإثبات ان(P موديول تصالبي $= (\mu\, M: \to M$

$$(CM1):\ \mu\ (m^p) = \mu\ (m_p{}^m) = \mu\ (m_p{}^{-1} m\, m_p)$$
$$= (\mu\ (m_p))^{-1}\ \mu\ (m)\, M(m_p)$$
$$= p^{-1}\ \mu\,(m) p$$
$$(CM2):\ m^{\mu(n)} = n^{-1}\, mn$$

لكل $p \in P,\ m,n \in M$

4- التشاكلات التصالبية Crossed Homomorphisms

في هذا البند ربطنا بين أفعال الزمر على الزمر والمقاسات التصالبية مع مفهوم أخر وهو التشاكلات التصالبية.

تعريف 4-1:- [5]

لتكن K زمرة -H فن التطبيق $f: H \to K$ يسمى تشاكلا تصالبيا إذا كان

$f(xy) = f(x)\,^{x}(f(y))$ لكل $x,y \in H$

قضية 4-2:-

لتكن K زمرة -H وان $f: H \to K$ تشاكل فإن:

(i) f تشاكل تصالبي إذا كان فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه فأن.

(ii) إذا كان f تشاكلا تصالبيا شاملا فإن فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه.

البرهان:

(i) ليكن فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه، فانه

$f(xy) = f(x)\, f(y) = f(x)\,^{x}(f(y))$ لكل $x,y \in H$ لذا فان f تشاكل تصالبي.

(ii) ليكن f تشاكلا تصالبيا شاملا، فانه لكل عنصر $k \in K$ يوجد عنصر مثل $y \in H$

بحيث ان $k = f(y)$. لكون f تشاكلا فان $f(xy) = f(x)\, f(y)$ ولكون f تشاكلا تصالبيا

فان $f(xy) = f(x)\,^{x}(f(y))$ لذا فان $f(x)\,^{x}(f(y)) = f(x)\, f(y)$

ومنها $^{x}(f(y)) = f(y)$، وهذا يؤدي إلى انه $^{x}k = k$.

أي ان فعل H على K و الفعل التافه.

قضية 4-3:-

ليكن $f:H \to K$ تشاكلا تصالبيا وليكن التطبيق: $f_0: H \to K \times H$ معرفا بالقاعدة:

$f_0(x) = (f(x), x)$ لكل $x \in H$. فان f_0 تشاكل متباين.

البرهان:

(i) $f_0(xy) = (f(xy), xy) = (f(x)^{x}(f(y)), xy)$
$= (f(x),x)(f(y),y) = f_0(x)f_0(y)$

لكل $x, y \in H$

لذا فان f_0 تشاكل.

(ii) ليكن $x, y \in H$ بحيث ان $f_0(x) = f_0(y)$ فإن $(f(x),x)=(f(y),y)$

لذا فإن $x=y$ ومنها f_0 متباين.

قضية 4-4:−

إذا كان $f:H \to K$ تشاكلا فأنه شامل إذا كان f_O شاملا.

البرهان:− بما ان f_O شامل فانه لكل عنصر (k,h) من $K \times H$ يوجد على الأقل عنصر مثل $x \in H$ بحيث ان $f_O(x) = (k,h)$ ، ولكن $f_O(x) = (f(x),x)$ لذا فأن $f(x)=k$.

أي انه f شامل.

تعريف 4-5:−

لتكن K زمرة -H تعرف التطبيق $\mu : K \times H \to H$ بالقاعدة $\mu(k,h)=h$

لكل $h \in H, k \in K$.

قضية4-6:

(i) التطبيق μ هو تشاكل شامل

(ii) μ متباين إذا وفقط إذا $K=\{e_K\}$.

البرهان:−

(i) $\mu((k_1,h_1)(k_2,h_2)) = \mu(k_1^{h_1}k_2, h_1h_2) = h_1h_2$
$= \mu(k_1,h_1)\,\mu(k_2,h_2)$

لكل $(k_1,h_1),(k_2,h_2) \in k \times H$
لذا فإن μ تشاكل.

ليكن $h \in H$ فإن $\mu(e,h)=h$ لذا فإن μ شامل

(ii) ليكن μ متباينا. نفرض ان $k \in K$ فإن $\mu(e_K,e_H) = \mu(k,e_H)$

لذا فإن $(k, e_H) =(e_K, e_H)$. لأن μ متباين ومنها $k = e_K$ وهذا معناه $K = \{ e_K \}$.

وبالعكس ليكن $K=\{e_K\}$. نفرض ان $\mu(e_K,h_2) = \mu(e_K,h_1)$ فإن $h_1=h_2$.

لذا فإن $(e_K,h_1)=(e_K,h_2)$ ، فإن μ متباين.

مبرهنة 4-7 :

لتكن $f:H\to K$ تشاكلا تصالبيا حيث $\mu\circ f_0 = i_H$ حيث $i_H(h)=h$ لكل $h\in H$

البرهان:

لكل $h\in H$

$$(\mu\circ f_0)(h)=\mu(f_0(h))=\mu(f(h),h)=h=i_H(h)$$

لذا فان $\mu\circ f_0 = i_H$.

مبرهنة4-8:

لتكن A مجموعة التشاكلات المتصالبة $f:H\to K$ و B مجموعة التشاكلات $\alpha:H\to K\times H$ بحيث ان $(\mu\circ\alpha)(h)=h$ لكل $h\in H$ فان $|A|=|B|$.

البرهان:

نعرف التطبيق $F:A\to B$ بالقاعدة $F(f)=f_0$ لكل $f\in A$

(i) ليكن $F(f)=F(f')$ حيث ان f,f' فان

$$F(f)=F(f')\Rightarrow f_0=f_0'\Rightarrow f_0(h)=f'(h)=\forall h\in H$$
$$\Rightarrow (f(h),h)=(f'(h),h)\Rightarrow f(h)=f'(h)=f=f'$$

لذا فان f متباين.

(ii) ليكن $\alpha\in B$ وليكن $\alpha(h)=(k_1,h_1)$ فان $(\mu\circ\alpha)(h)=\mu(\alpha(h))=\mu(k_1,h_1)=h_1$ ولكن $(\mu\circ\alpha)(h)=h$ لذا فان $h_1=h$. أي انه $\alpha(h)=(k_1,h)$ لكل $h\in H$.

ليكن $f:H\to K$ تطبيقا يحقق الشروط $\alpha(h)=(f(h),h)$ لكل $h\in H$

فان $f\in A$ (أي ان f تشاكل تصالبي) لكل $x,y\in H$

(تعريف f) $\quad \alpha(x,y)=(f(xy),xy)\in K\times H$

α (تشاكل)

$$\alpha(x,y)=\alpha(x)\alpha(y)$$
$$=(f(x),x)(f(y),y)\in K\times H=(f(x))^x(f(y)),xy)$$

لذا فان $(f(xy),xy)=(f(x))^x(f(y),xy)$ ومنها $f(xy)=(f(x))^x(f(y))$ لكل $x,y\in H$ كذلك $\forall h\in H\quad f_0(h)=(f(h),h)=\alpha(h)$ فان $\alpha=f_0$ ومنها $F(f)=f_0=\alpha$ لذا فان F شامل. وهكذا فان F تقابل. أي انه $|A|=|B|$.

مما سبق نلاحظ ان علاقة التقابل بين المجموعتين A,B حصلنا عليها في مقابلة كل تشاكل تصالبي. $f: H \to K$ مع تشاكل $f_0 : H \to K \times H$.

المصادر

[1] Boorman, E.H.,(1975), “S-operations in Representation THeory”, Trans. Amer. Math. Soc. 205, 127-149.

[2] Brown, R. & Wensley C.D., (1995), “On Finite Induced Crossed Modules, and the Homotopy 2-Type of Mapping Cones”. Theory and Application of Categories, Vol.1,No.3,54-71.

[3] Brown, R.& Wensley C.D., “Computing Crossed Modules Induced by an Inclusion of a Normal Subgroup, with Applications to Homotopy 2-Types”, Theory and Applications of Categories, vol.2,No.1,pp,3-16.

[4] Ellis, G.J.,(1984) , “Crossed modules & their higher Dimensional Analogues”, Ph.D. Thesis, University of Walse (Bangor) , U. K.

[5] Hochschild, G.,(1977), “Basic Constructions in Group txtension Theory”. University by of California, Berkeley,In, Contributions to Algebra. H. Bass,ed.

[6] Korkes, F.J. & Mahdi R.S., (1995), “The Universal Property to Continuous Morphisms of Pro-C Crossed Modules”, Basrah J. Science, Vol.13, No.1, 71-82.

[7] Mohammad, A.J. & Mohammad S.A., (1994), “On Finite Group-Sets of Finite Groups”, J.Educ. & Sci., Vol-22,78-84.

[8] Neumann, P.M., Stoy G.A.& Thompson E. C., April (1980), “Group and Geometry”, Vol. I, The Mathematical Institute, Oxford, Re- issued (1982).

[9] Norrie, K. J., (1990), “Action and Automorphisms of Crossed Modules”, Bull. Soc. Math. France, 118,126-146.

[10] Rose, J.S., (1978), “A Course on Group Theory”, Cambridge University Press, Cambridge.