Runge-Kutta Methods of Higher Order for Solving Stiff Problems

Mohammed Mahmood Salih
mohammed.salihcs@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul

Basheer Mohammed Salih
College of Education
University of Mosul

Received on: 23/10/2004 **Accepted on: 05/04/2005**

ABSTRACT

Our purpose in this research is the development of higher order Runge-Kutta methods for solving stiff systems. We have developed methods of order five, six, and seven. We studied their stability Region and applications for solving stiff systems. Then we developed the corresponding implicit forms of these methods and we analyzed their stability and implementation for solving stiff systems.

Keywords: Runge-Kutta methods of higher order, ordinary differential equations, stiff problems.

طرائق رنج–كوتا من الرتب العليا لحل المسائل الصلبة

بشير محمد صالح
كلية التربية
جامعة الموصل

محمد محمود صالح
كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:2004/10/23 **تاريخ قبول البحث:2005/4/5**

الملخص

تم في هذا البحث اشتقاق طرائق رنج–كوتا من الرتب العليا (الخامسة والسادسة والسابعة) لحل المسائل الابتدائية الصلبة (الجافة) ثم دراسة مناطق الإستقرارية لهذه الطرائق التي تم تطويرها إلى طرائق ضمنية . وتطبيقها في حل المسائل الابتدائية الصلبة . وكما تم إيجاد فترات الإستقرارية لهذه الطرائق . وهذه الطرائق الجديدة سهلة الاستخدام والبرمجة مقارنة مع الطرائق العددية الأخرى لهذا النوع من المسائل الابتدائية الصلبة (الجافة) .

الكلمات المفتاحية: طرائق رنج–كوتا من الرتب العليا، المعادلات التفاضلية الإعتيادية، المسائل الصلبة.

1. المقدمة:

ظهرت المسائل الصلبة منذ نصف قرن ،ومضت عليها بضع سنين من الإهمال حتى قال العالم G.Dahquist في نحو 1960 " أصبح كل واحد مدركاً أن العالم مليء بالمسائل الصلبة ". أستخدمت مسائل القيم الإبتدائية عند دراسة حركة النوابض ذات الصلابة المختلفة ومنها أشتقت المسألة إسمها. [2]

كان أول ظهور لمصطلح الصلابة في بحث لـ Hirschfelder و Gurtiss سنة 1952 في مسألة في علم الكيمياء الحركية ،إذ قاما بإقتراح أول مجموعة من صيغ التكاملات العددية الملائمة لمسائل القيم الإبتدائية الصلبة. [2]

ثم طور Cash سنة 1975 الطرائق ذات الخطوة الواحدة فجاءت مشابهة في التصميم لطرائق رنج–كوتا للتكامل العددي الفعالة للأنظمة الجافة وغير الجافة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى.[7]

كما طور Cash سنة 1983 حساباً ملائماً للتكامل العددي للأنظمة الجافة يضم صيغ رنج–كوتا الضمنية.[6]

وفي السنوات الأخيرة أبتكرت طرائق عددية للمعادلات التفاضلية الصلبة وتم تطبيق قسم منها بنجاح على أنواع معينة من المعادلات التفاضلية الصلبة.

وفي سنة 2000 تم إيجاد وتطوير خوارزميات عددية متوازية جديدة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الإعتيادية الجافة كما تم إشتقاق طرائق رنج–كوتا الضمنية الجزئية التوازي.[10]

2. طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا:

تعد طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا من الطرائق المهمة في حل أنظمة المعادلات التفاضلية الصلبة إذ تعطينا نتائج قريبة جداً إلى النتائج الحقيقية.

ولقد إهتم العلماء والباحثون في إيجاد طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا للحيلولة دون الحصول على نتائج غير صحيحة بتاتاً.

ومنذ أوائل السبعينات ولحد الآن لايزال الإهتمام مركزاً على إيجاد وإشتقاق طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا وتطويرها بحيث تعطينا دقة في النتائج وسهولة في الإستخدام.

سنتطرق الآن إلى طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا التي تم التوصل إليها.

2.1 طريقة رنج كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة:[3]

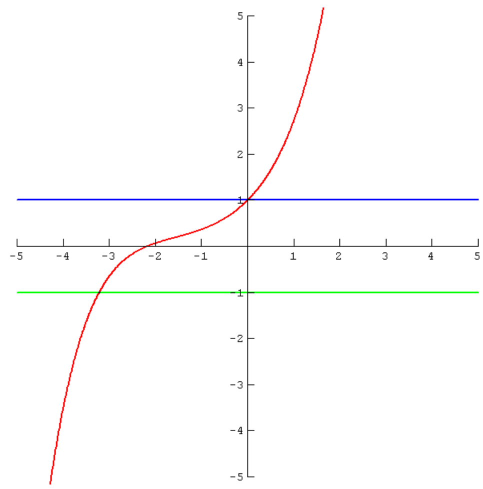
إن صيغة رنج-كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة تكون بالشكل الآتي :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{48}(8k_1 + 20k_2 + 12k_3 + 6k_4 + k_5 + k_6)$$

حيث

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$
$$k_5 = f(x_n + h, y_n + hk_4)$$
$$k_6 = f(x_n + h, y_n + hk_5)$$

فترة إستقرارية هذه الطريقة $(-3.2,0)$ [انظر الشكل (1.1)] .



الشكل (1.1) فترة إستقرارية طريقة رنج-كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة

2.2 طريقة رنج-كوتا الصريحة من الرتبة السادسة: [3]

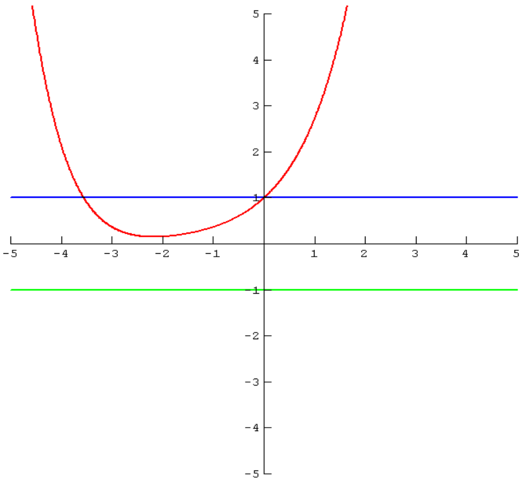
تكون صيغة رنج-كوتا الصريحة من الرتبة السادسة بالشكل الآتي :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{96}(16k_1 + 40k_2 + 24k_3 + 12k_4 + 2k_5 + k_6 + k_7)$$

حيث

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$
$$k_5 = f(x_n + h, y_n + hk_4)$$
$$k_6 = f(x_n + h, y_n + hk_5)$$
$$k_7 = f(x_n + h, y_n + hk_6)$$

فترة الإستقرارية لهذه الطريقة $(-3.6,0)$ [انظر الشكل (1.2)] .



الشكل (1.2) فترة إستقرارية طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة السادسة

2.3 طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة السابعة: [3]

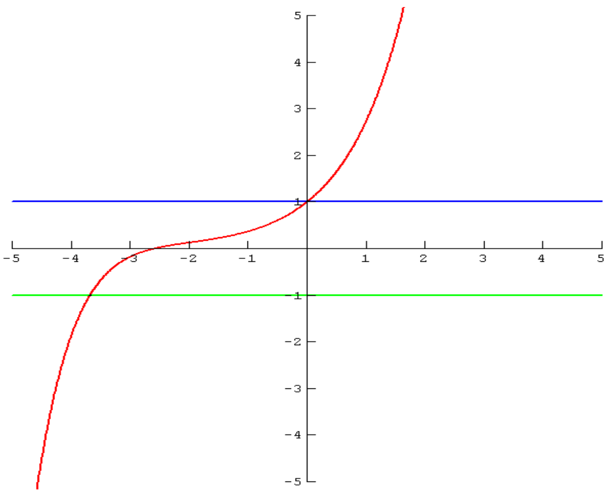
صيغة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة السابعة تكون بالشكل الآتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{192}(32k_1 + 80k_2 + 48k_3 + 24k_4 + 4k_5 + 2k_6 + k_7 + k_8)$$

حيث أن

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$
$$k_5 = f(x_n + h, y_n + hk_4)$$
$$k_6 = f(x_n + h, y_n + hk_5)$$
$$k_7 = f(x_n + h, y_n + hk_6)$$
$$k_8 = f(x_n + h, y_n + hk_7)$$

فترة الإستقرارية لهذه الطريقة $(-3.7,0)$ [انظر الشكل (1.3)] .



الشكل (1.3) فترة إستقرارية طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة السابعة

2.4 فترة الإستقرارية لطرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا:

تأمل مسألة القيم الإبتدائية الآتية :[2,1]

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, x \in [a, b] \qquad \dots (1)$$

إن الصيغة العامة لطريقة رنج–كوتا من المرحلة R تكون بالشكل الآتي : [2,1]

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \qquad \dots (2)$$

يقال أن الصيغة العامة لطريقة رنج–كوتا من المرحلة R أنها من الرتبة P إذا كان : [2,1]

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{p+1}) \qquad \dots (3)$$

بإستخدام الصيغة (2) على معادلة الفروقات نحصل على ما يأتي : [2,1]

$$y_{n+1} = E(\lambda h)y_n \qquad \dots (4)$$

وبإستخدام مسألة الإختبار نحصل على ما يأتي : [2,1]

$$y' = \lambda y, y(x_0) = y_0 \qquad \dots (5)$$

وهكذا فإن :

$$E(\bar{h}) = r_1 = 1 + \bar{h} + \frac{1}{2!}\bar{h}^2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{p!}\bar{h}^p + O(\bar{h}^{p+1}) \qquad \dots (6)$$

حيث أن $\bar{h} = \lambda h$ و r_1 متعددة حدود من الدرجة R في $\bar{h}$.

وعليه تكون فترات الإستقرارية لطرائق رنج–كوتا من الرتب العليا كما في الجدول الآتي. مع الأخذ بنظر الإعتبار أنه تم إيجاد هذه الفترات بإستخدام الرسم الآتي :

RK	r_1	فترة الإستقرارية
5	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2!}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}+\frac{\bar{h}^5}{5!}$	(-3.2,0)
6	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2!}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}+\frac{\bar{h}^5}{5!}+\frac{\bar{h}^6}{6!}$	(-3.6,0)
7	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2!}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}+\frac{\bar{h}^5}{5!}+\frac{\bar{h}^6}{6!}+\frac{\bar{h}^7}{7!}$	(-3.7,0)

2.5 تطبيقات على المسائل الصلبة:

في هذه الفقرة سوف يتم تطبيق طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا على المسائل الصلبة مع بيان مدى كفاءة هذه الطرائق :

مثال (2.5.1) :

حل نظام المعادلات التفاضلية الآتي :

$$y_1' = y_2, y_1(0) = 1$$
$$y_2' = -1001y_2 - 1000y_1, y_2(0) = -1$$

سوف نأخذ قيمة طول الخطوة h=0.002.

تشير طرائق رنج–كوتا الصريحة إلى مدى تأثير إستخدام طول الخطوة h ومدى كفاءة هذه الطرائق مقارنة بالطرائق الاعتيادية .

مثال (2.5.2) :

حل نظام المعادلات التفاضلية الآتي :

$$y_1' = 600y_1^2(y_2 - y_1^3), y_1(0) = 0.1$$
$$y_2' = -200(y_2 - y_1^3) + 2(1 - y_2), y_2(0) = -0.1$$

سوف نأخذ قيمة طول الخطوة h=0.001.

قيم رنج– كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة		القيم الحقيقية		قيم الخطأ لرنج– كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة	
قيم y_1	قيم y_2	قيم y_1	قيم y_2	قيم الخطأ لـ y_1	قيم الخطأ لـ y_2
1	−1	1	-1	0	0
0.998	-0.998	0.998	-0.998	3.3307e-13	3.3307e-13
0.99601	-0.99601	0.99601	-0.99601	6.648e-13	6.648e-13
0.99402	-0.99402	0.99402	-0.99402	9.952e-13	9.952e-13
0.99203	-0.99203	0.99203	-0.99203	1.3243e-12	1.3243e-12
0.99005	-0.99005	0.99005	-0.99005	1.652e-12	1.652e-12
0.98807	-0.98807	0.98807	-0.98807	1.9785e-12	1.9785e-12
0.9861	-0.9861	0.9861	-0.9861	2.3037e-12	2.3037e-12
0.98413	-0.98413	0.98413	-0.98413	2.6276e-12	2.6276e-12
0.98216	-0.98216	0.98216	-0.98216	2.9501e-12	2.9501e-12
0.9802	-0.9802	0.9802	-0.9802	3.2715e-12	3.2715e-12

الجدول (1.1) نتائج حل المسألة في المثال (2.5.1) بإستخدام طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة

قيم الخطأ لرنج– كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة		القيم الحقيقية		قيم رنج– كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة	
قيم الخطأ لـ y_2	قيم الخطأ لـ y_1	قيم y_2	قيم y_1	قيم y_2	قيم y_1
0	0	-0.1	0.1	-0.1	0.1
1.6012e-05	5.4445e-07	-0.079707	0.099459	-0.079723	0.09946
4.1277e-05	1.4336e-06	-0.063115	0.099032	-0.063156	0.099034
5.6747e-05	1.9968e-06	-0.049564	0.098697	-0.049621	0.098699
6.5164e-05	2.3244e-06	-0.038498	0.098435	-0.038563	0.098437
6.8593e-05	2.4873e-06	-0.029459	0.098233	-0.029528	0.098235
6.8578e-05	2.537e-06	-0.022078	0.098079	-0.022146	0.098081
6.6267e-05	2.5105e-06	-0.016049	0.097964	-0.016115	0.097966
6.2501e-05	2.4348e-06	-0.011125	0.09788	-0.011188	0.097883
5.7891e-05	2.3292e-06	-0.0071035	0.097823	-0.0071614	0.097825
5.2121e-05	2.1684e-06	-0.0038196	0.097786	-0.0038717	0.097788

الجدول (1.2) نتائج حل المسألة في المثال (2.5.2) بإستخدام طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة

وعليه يتضح من إستخدام طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا مدى كفاءة هذه الطرائق مقارنة بالطرائق الإعتيادية ومدى دقتها من حيث النتائج .

3. طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا:

ان أفضل الطرائق العددية لحل المسائل الصلبة هو إستخدام الطرائق الضمنية لذلك إهتم العلماء والباحثون في إيجاد وإشتقاق هذه الطرائق التي تعطينا دقة في النتائج .

اعتماداً على هذه الخاصية تم مؤخراً إيجاد طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا. وكما هو معروف فإن حل المسائل الصلبة يعتمد على فترات الإستقرارية للطرائق العددية ،لذلك أصبح الهدف العام من طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا أن تكون فترات إستقراريتها أكبر من مثيلاتها الصريحة .

نشتق طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب 5 ،6 ،7 :

3.1 طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة: [3]

اعتماداً على طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة الخامسة تكون صيغة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة بالشكل الآتي :

$$y_n = y_{n+1} - \frac{h}{48}(8k_1 + 20k_2 + 12k_3 + 6k_4 + k_5 + k_6)$$

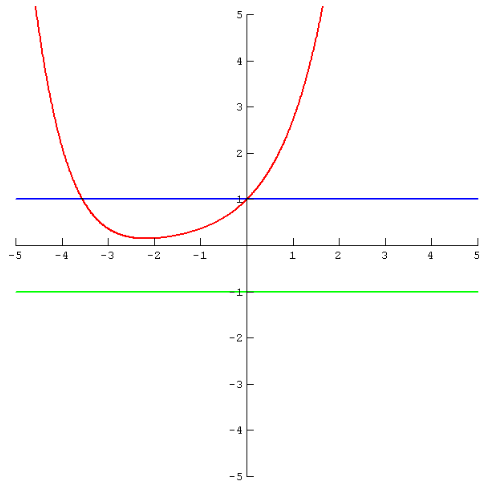
حيث

$$k_1 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$
$$k_2 = f(x_{n+1} - \frac{h}{2}, y_{n+1} - \frac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_{n+1} - \frac{h}{2}, y_{n+1} - \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_3)$$
$$k_5 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_4)$$
$$k_6 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_5)$$

وعليه فان:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{48}(8k_1 + 20k_2 + 12k_3 + 6k_4 + k_5 + k_6)$$

فترة إستقرارية هذه الطريقة $(-3.6,0)$ [انظر الشكل (2.1)] .



الشكل (2.1) فترة إستقرارية طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة

3.2 طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة السادسة: [3]

إعتماداً على طريقة رنج–كوتا الصريحة من الرتبة السادسة تكون صيغة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة السادسة بالشكل الآتي :

$$y_n = y_{n+1} - \frac{h}{96}(16k_1 + 40k_2 + 24k_3 + 12k_4 + 2k_5 + k_6 + k_7)$$

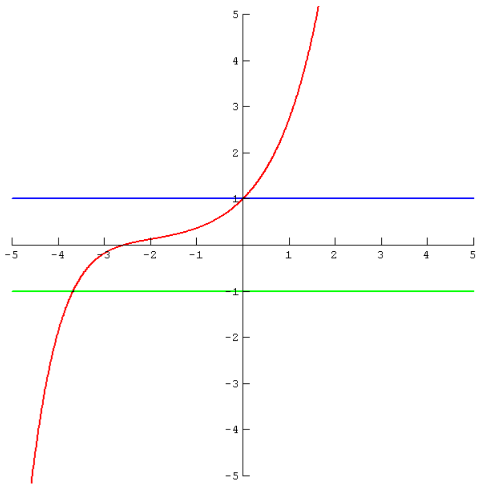
حيث أن :

$$k_1 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$
$$k_2 = f(x_{n+1} - \frac{h}{2}, y_{n+1} - \frac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_{n+1} - \frac{h}{2}, y_{n+1} - \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_3)$$
$$k_5 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_4)$$
$$k_6 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_5)$$
$$k_7 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_6)$$

وعليه فان :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{96}(16k_1 + 40k_2 + 24k_3 + 12k_4 + 2k_5 + k_6 + k_7)$$

فترة إستقرارية هذه الطريقة $(-3.7,0)$ [انظر الشكل (2.2)] .



الشكل (2.2) فترة إستقرارية طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة السادسة

3.3 طريقة رنج-كوتا الضمنية من الرتبة السابعة: [3]

إعتماداً على طريقة رنج-كوتا الصريحة من الرتبة السابعة تكون صيغة رنج-كوتا الضمنية من الرتبة السابعة بالشكل الآتي:

$$y_n = y_{n+1} - \frac{h}{192}(32k_1 + 80k_2 + 48k_3 + 24k_4 + 4k_5 + 2k_6 + k_7 + k_8)$$

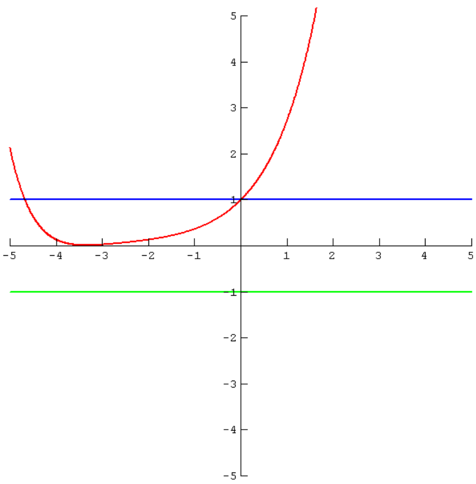
حيث أن:

$$k_1 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$
$$k_2 = f(x_{n+1} - \frac{h}{2}, y_{n+1} - \frac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_{n+1} - \frac{h}{2}, y_{n+1} - \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_3)$$
$$k_5 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_4)$$
$$k_6 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_5)$$
$$k_7 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_6)$$
$$k_8 = f(x_{n+1} - h, y_{n+1} - hk_7)$$

وعليه فان

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{192}(32k_1 + 80k_2 + 48k_3 + 24k_4 + 4k_5 + 2k_6 + k_7 + k_8)$$

فترة إستقرارية هذه الطريقة $(-4.7,0)$ [انظر الشكل(2.3)] .



الشكل (2.3) فترة إستقرارية طريقة رنج-كوتا الضمنية من الرتبة السابعة

3.4 فترات الإستقرارية لطرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا:

تأمل الصيغة العامة لطريقة رنج–كوتا من المرحلة R : [2,1]

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) \qquad \ldots (7)$$

يقال بأن صيغة رنج–كوتا الضمنية (7) من المرحلة R هي من الرتبة P إذا كان : [2,1]

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{p+1})$$

بإستخدام الصيغة (7) على معادلة الفروقات نحصل على : [2,1]

$$y_{n+1} = E(\lambda h) y_n \qquad \ldots (8)$$

وبإستخدام مسألة الإختبار : [2,1]

$$y' = \lambda y, y(x_0) = y_0 \qquad \ldots (9)$$

نحصل على : [2,1]

$$E(\bar{h}) = r_2 = 1 + \bar{h} + \frac{1}{2!}\bar{h}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(p+1)!}\bar{h}^{p+1} + O(\bar{h}^{p+1}) \qquad \ldots (10)$$

حيث $\bar{h} = \lambda h$ و r_2 متعددة حدود من الدرجة R في $\bar{h}$.

وعليه تكون فترات الإستقرارية المطلقة لطرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا كما في الجدول الآتي . مع الأخذ بنظر الإعتبار أنه تم إيجاد هذه الفترات بإستخدام الرسم الآتي :

RK	r_2	فترة الإستقرارية
5	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2!}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}+\frac{\bar{h}^5}{5!}+\frac{\bar{h}^6}{6!}$	(-3.6,0)
6	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2!}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}+\frac{\bar{h}^5}{5!}+\frac{\bar{h}^6}{6!}+\frac{\bar{h}^7}{7!}$	(-3.7,0)
7	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2!}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}+\frac{\bar{h}^5}{5!}+\frac{\bar{h}^6}{6!}+\frac{\bar{h}^7}{7!}+\frac{\bar{h}^8}{8!}$	(-4.7,0)

3.5 تطبيقات على المسائل الصلبة:

في هذه الفقرة سوف يتم تطبيق طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا على المسائل الصلبة مع بيان مدى كفاءة هذه الطرائق .

مثال (3.5.1) :

حل نظام المعادلات في المثال (2,5,1) بإستخدام طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة .

سوف نأخذ قيمة طول الخطوة h=0.002 .

تشير طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا إلى مدى تأثير إستخدام طول الخطوة h ومدى كفاءة هذه الطرائق مقارنة بالطرائق الصريحة .

مثال (3.5.2) :

حل نظام المعادلات في المثال (2,5,2) بإستخدام طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة .

سوف نأخذ قيمة طول الخطوة h=0.001 .

وعليه يتضح من إستخدام طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا مدى كفاءة هذه الطرائق مقارنة بالطرائق الصريحة ومدى دقتها في النتائج .

قيم رنج– كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة		القيم الحقيقية		قيم الخطأ لرنج– كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة	
قيم y_1	قيم y_2	قيم y_1	قيم y_2	قيم الخطأ لـ y_1	قيم الخطأ لـ y_2
1	-1	1	-1	0	0
0.998	-0.998	0.998	-0.998	3.3362e-13	3.3351e-13
0.99601	-0.99601	0.99601	-0.99601	6.6713e-13	6.6702e-13
0.99402	-0.99402	0.99402	-0.99402	1.0006e-12	1.0003e-12
0.99203	-0.99203	0.99203	-0.99203	1.3343e-12	1.3335e-12
0.99005	-0.99005	0.99005	-0.99005	1.6679e-12	1.6678e-12
0.98807	-0.98807	0.98807	-0.98807	2.0014e-12	2.0012e-12
0.9861	-0.9861	0.9861	-0.9861	2.3349e-12	2.3354e-12
0.98413	-0.98413	0.98413	-0.98413	2.6685e-12	2.6686e-12
0.98216	-0.98216	0.98216	-0.98216	3.002e-12	3.0024e-12
0.9802	-0.9802	0.9802	-0.9802	3.3354e-12	3.3356e-12

الجدول (2.1) نتائج حل المسألة في المثال (3.5.1) بإستخدام طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة

قيم الخطأ لرنج– كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة		القيم الحقيقية		قيم رنج– كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة	
قيم الخطأ y_2	قيم الخطأ y_1	قيم y_2	قيم y_1	قيم y_2	قيم y_1
0	0	-0.1	0.1	-0.1	0.1
8.1918e-06	2.8755e-07	-0.079707	0.099459	-0.079715	0.09946
2.7068e-05	9.7337e-07	-0.063115	0.099032	-0.063142	0.099033
3.732e-05	1.3745e-06	-0.049564	0.098697	-0.049602	0.098698
4.1473e-05	1.5724e-06	-0.038498	0.098435	-0.038539	0.098437
4.1419e-05	1.6311e-06	-0.029459	0.098233	-0.029501	0.098234
3.8559e-05	1.5966e-06	-0.022078	0.098079	-0.022116	0.09808
3.3923e-05	1.5021e-06	-0.016049	0.097964	-0.016083	0.097965
2.8257e-05	1.3713e-06	-0.011125	0.09788	-0.011153	0.097882
2.2095e-05	1.221e-06	-0.0071035	0.097823	-0.0071256	0.097824
1.5057e-05	1.0238e-06	-0.0038196	0.097786	-0.0038347	0.097787

الجدول (2.2) نتائج حل المسألة في المثال (3.5.2) بإستخدام طريقة رنج–كوتا الضمنية من الرتبة الخامسة

الإستنتاجات :

إن أهم ماتناوله البحث هو طرائق رنج–كوتا من الرتب العليا لحل مسائل القيم الإبتدائية الصلبة التي تعد من الأمور المهمة لتعلقها بموضوعات مهمة في حياتنا اليومية مثل موضوعات الكيمياء وشبكة المعلومات وغيرهما مما يدخل فيه هذا النوع من المسائل .

تم إشتقاق طرائق رنج–كوتا الصريحة من الرتب العليا لحل المسائل الصلبة، وتم إستخدام هذه الطرائق لحل المسائل الصلبة وقد تبين أن هذه الطرائق ناجحة في المسائل الصلبة إذ تم الحصول على نتائج وكانت دقيقة .

كما تم إشتقاق طرائق رنج–كوتا الضمنية من الرتب العليا لحل المسائل الصلبة وقد كانت هذه الطرائق أفضل من مثيلاتها الصريحة في حل هذا النوع من المسائل وتم الحصول على نتائج أفضل بكثير من نتائج رنج–كوتا الصريحة إعتماداً على قيمة طول الخطوة h حيث تكون h واقعة داخل منطقة الإستقرارية لطرائق رنج–كوتا من الرتب العليا بنوعيها الصريحة والضمنية .

كما تمت دراسة فترات الإستقرارية لطرائق رنج–كوتا من الرتب العليا الصريحة والضمنية .

مما سبق يتضح أن طرائق رنج–كوتا من الرتب العليا تعد أفضل الطرائق لحل مسائل القيم الإبتدائية الصلبة وبأخطاء قليلة .

المصادر

[1] آل–همات ،غانم محمد صالح ،توسيع مناطق الإستقرارية لبعض الطرق العددية لمسائل القيم الإبتدائية ،رسالة ماجستير ،جامعة الموصل ، (1999).

[2] عبد الباقي ،صهيب عبد الجبار ،طرائق مطورة لحل المسائل الخطية الصلبة ،رسالة ماجستير ،جامعة الموصل ، (2002).

[3] صالح ،محمد محمود ،إستخدام طرائق رنج–كوتا لحل المسائل الصلبة ،رسالة ماجستير ،جامعة الموصل ، (2003).

[4] Butcher, J.C. and Diamantakis, M.T., DESIRE: Diagonally extended singly implicit Runge-Kutta effective order methods, Numeric. Algorithm, 17, (1998), pp. 121-145.

[5] Butcher, J.C., Numerical methods for diff. eq.s and applications, the Arabian Journal for Science and Engineering, Dharan, Saudi Arabia, 22(2Command), (1997), pp. 17-29.

[6] Cash, J. R., Block Runge-Kutta methods for numerical integration of initial value problems in ordinary diff. eq.s Part II: the stiff case, Math. Of Computation, Vol. 40, No. 161, (1983), pp. 193-206.

[7] Cash, J. R., A Class of implicit Runge-Kutta methods for the numerical integration of stiff ordinary diff. eq.s, Journal of the Association of Computing Machinery, Vol. 22, No. 4, (1975), pp. 504-511.

[8] Cash, J.R., Runge-Kutta methods for the solution of stiff two-point boundary value problems, Applied Numeric. Math., Vol. 22, (1996), pp. 165-177.

[9] Murshed, Abdul-Habib Abdullah, New Parallel numerical algorithms for solving stiff ordinary diff. eq.s adapted for MIMD Computers, Ph.D. thesis, Univ. of Mosul, (2000).

[10] Roche, M., Lubich, C. and Hairer, E., Error of Rosenbrock method for stiff ordinary diff. eq.s, Bit, 29, (1989), pp. 77-90.

[11] Voss, D.A. and Casper M.J., Efficient split linear multistep methods for stiff ordinary diff. eq.s, SIAM Journal Sci. Stat. Comput., Vol. 19, No. 5, (1989), pp. 990-999.

[12] Voss, D.A., Factored two-step Runge-Kutta methods, App. Math. And Comput., Vol. 31, (1989), pp. 361-368.

[13] Voss, D.A., Fifth-order exponentially fitted formula, SIAM Journal Numeric. Anal., Vol. 25, No. 3, (1988), pp. 670-678.